

SIMULACIÓN Y MODELIZACIÓN: ALGUNAS RELACIONES POSIBLES

Esteley, Cristina(1); Villagra, Constanza(1); Vera, Natalia(1);

Cristante Analía(2) y Marguet Isabel (2)

esteley@famaf.unc.edu.ar; cotyv_22@hotmail.com; naty_capa04@hotmail.com;

analiamarangoni@hotmail.com e isabelmarguet@yahoo.com.ar

(1): Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF)-Universidad Nacional de Córdoba (UNC) y (2): Colegio 25 de Mayo

Tema: VI.2 - Enseñanza Experimental de la Matemática.

Modalidad: CB.

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)

Palabras clave: Modelización Matemática, Formación de Profesores, Simulación

Resumen

Con este trabajo presentamos resultados provenientes de una experiencia de modelización matemática (MM) puesta en aula por dos estudiantes del profesorado en matemática de FaMAF en un colegio secundario de la ciudad de Córdoba durante el año 2012. La experiencia de MM conformó las prácticas profesionales de estas estudiantes quienes, acompañadas por tres docentes, montaron un “escenario de modelización colectiva” (Esteley, 2011) focalizado en la desintegración radioactiva. La MM puede ser mirada desde una perspectiva matemática y/o pedagógica. Desde la primera, consideramos que la MM es “un modo de vida” de los matemáticos profesionales interesados por lo que se denomina “matemática aplicada” (Houston; Ikeda; Kaloudatos & Matos, 2008). Desde lo pedagógico, la MM hace referencia al trabajo con modelos matemáticos en situaciones de enseñanza que privilegian la relación mundo exterior-matemática y busca reproducir en aula las actividades de la comunidad matemática (Biembengut & Hein, 2000). Con estas ideas como supuestos, el escenario montado, se focalizó en el fenómeno de desintegración apelando a un proceso de simulación como medio para recoger datos pertinentes, buscar regularidades, construir un modelo matemático, analizarlo y generalizarlo a otros contextos. Todo este proceso estuvo mediado por el uso de tecnologías que potenció el escenario montado en aula.

La construcción de la experiencia de enseñanza en contexto

La experiencia de enseñanza sobre la cual se busca informar con este trabajo, se encuentra atravesada por un conjunto de factores. Tales factores le otorgan particularidades que es necesario explicar brevemente antes de describir la experiencia de aula propiamente dicha. Por un lado, dicha experiencia, constituye el corpus de datos de un proyecto de investigación asentado en la FaMAF. Por otro lado, la misma se produce en el marco de las prácticas profesionales de dos estudiantes del profesorado en Matemática de la misma institución.

En este sentido, en primer lugar, cabe señalar que el proyecto de investigación con el que se vincula se titula *Desarrollo profesional de docentes o futuros docentes que enseñan matemática: indagaciones, perspectivas y desafíos en diferentes escenarios* y se encuentra subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNC y por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica. Una de las preguntas que guían la indagación, se relaciona con las particularidades del desarrollo profesional de futuros profesores de matemática, cuando éstos se involucran con proyectos de modelización matemática, en distintas instancias o condiciones. Las tres docentes que acompañaron a las practicantes en su puesta en aula colaboran en el proyecto de investigación. Dos de estas docentes trabajan en el colegio en el que se llevó adelante la experiencia, jugando desde ese espacio, el rol de profesoras tutoras y la tercera docente es la profesora supervisora de las prácticas profesionales.

En segundo lugar, cabe notar: 1) que la experiencia de aula se gestiona en el marco del curso de *Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza* correspondiente al cuarto año del Profesorado en Matemática de FaMAF; 2) que tal gestión implica una frecuente colaboración entre las practicantes, las docentes tutoras y la supervisora de las prácticas en la que las practicantes toman un rol protagónico y 3) que durante el año 2011, en el marco del curso anual *Didáctica Especial y Taller de Matemática*, correspondiente al tercer año del profesorado, las estudiantes habían realizado un trabajo de MM transitando todos los momentos del proceso de modelización.

A continuación se describen brevemente los momentos e ideas principales relacionadas con los procesos de MM que sustentan la práctica de enseñanza foco de esta comunicación.

Modelización Matemática: actividad, proceso y abordaje pedagógico.

Como se señala en Houston et al. (2008), la MM es “un modo de vida” de los matemáticos profesionales interesados por lo que se denomina “matemática aplicada”. La actividad relacionada con la MM es una actividad que guarda similitudes con el método científico y puede ser mirada como un marco de investigación. La modelización es utilizada en varias áreas de conocimiento de tal modo que, el matemático, en colaboración con otros expertos, crea un modelo que permite resolver y explicar problemas vinculados con un fenómeno en estudio. Otra actividad que algunos autores identifican con la modelización, es aquella en la que, matemáticos o científicos, aplican

un modelo ya construido. Un aspecto interesante es que, quizás, como consecuencia de la aplicación, el modelo ya existente puede llegar a ser mejorado (Houston et al, 2008). En este sentido, la MM crece de algún modo integrada a las aplicaciones. Sin embargo, como indican Zawojewski (2010), Borba & Villarreal (2005) y Blum; Galbraith; Henn, & Niss, (2003), aunque las aplicaciones entrañen semejanzas con modelización, también presentan importantes diferencias. De acuerdo a Blum et al. (2003), la denominación ‘aplicaciones y modelización’ ha sido usada para “denotar todo tipo de relación entre el mundo real y la matemática” (p. 153) donde ‘mundo real’ es “todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana así como las materias de la escuela o la universidad o disciplinas científicas diferentes de la matemática” (p. 152). Este autor indica que mientras las aplicaciones se focalizan en la dirección que va de la matemática al mundo real y enfatizan los productos que son aplicados, la modelización se focaliza en la dirección opuesta y enfatiza los procesos involucrados en ese movimiento. En este sentido, Bassanezi (2002), considera que la modelización matemática es un proceso en el que se identifican momentos o subprocesos de: 1) experimentación, 2) abstracción, 3) resolución, 4) validación, 5) modificación y 6) aplicación. De este modo, un proceso de MM completo es aquel en el que se conectan ideas, hechos y actividades matemáticas, que van modificándose sin seguir un orden lineal sino acorde a los productos alcanzados en cada momento del proceso. De acuerdo a las visiones que se sostengan, luego, en el contexto educativo, las aplicaciones, la realidad y la modelización pueden adquirir diferentes roles tales como: 1) aplicar un modelo conocido o recién enseñado, 2) mostrar un problema real para motivar la enseñanza del conocimiento que permite resolver el problema, 3) trabajar con proyectos en los que el profesor elige un tema de la vida real y formula el problema y 4) trabajar con temas elegidos por los alumnos quienes luego formulan un problema y se involucran en un proceso de modelización. En cada una de estas opciones, alumnos, docentes y conocimiento juegan roles diferentes y por lo tanto los escenarios educativos que se puedan montar difieren sustancialmente. Por ejemplo, mientras que en 1) y 2) se privilegian las aplicaciones haciendo énfasis en un movimiento que va de la matemática al mundo real, en 3) y 4) se privilegia el proceso de modelización que se mueve del mundo real hacia la matemática (Villarreal, Esteley & Mina, 2010). En lo que sigue se explicita la opción tomada para la práctica docente, las condiciones institucionales y el escenario puesto en aula.

La experiencia de enseñanza: contexto áulico, momentos y perspectivas

La puesta en aula se llevó a cabo en una sección del quinto año del Ciclo Secundario con orientación en Ciencias Naturales de 20 alumnas del Colegio 25 de Mayo, Córdoba, Argentina. Dicho colegio es de gestión privada. Esta institución fue elegida para la práctica profesional que se informa, no solo por su disposición a aceptar practicantes, sino y fundamentalmente porque las dos profesoras tutoras ya tenían experiencia de trabajar con MM en sus clases (Marguet; Esteley; Cristante & Mina 2007; Cristante; Esteley; Marguet & Mina, 2007). Una de tales experiencias fue llevada a cabo durante el año 2004 en esta misma institución (Esteley et al, 2007) por lo que este colegio aparece claramente como un espacio de apertura para la innovación. Otro aspecto importante para la experiencia, es que, en la planificación anual de la profesora del curso, se había planteado una unidad cuyo objetivo era el estudio del proceso de MM y fue desarrollada en el primer semestre del año. En ese período, y antes de las prácticas, además se realizó con las alumnas un trabajo intenso de búsqueda de regularidades y relaciones. En síntesis, las alumnas ya manejaban las nociones de modelización y podían vincularla con hechos experimentales de fenómenos extra matemáticos. En este contexto, para las prácticas se elige la opción 3) presentada en la sección anterior y privilegiando el trabajo en grupos constituidos por cuatro alumnas cada uno. La misma tuvo por finalidad montar en aula un escenario de MM poniendo en juego actividades de experimentación y simulación. En este escenario se favoreció el uso de tecnologías y a la vez, las mismas, fueron necesarias para poder llevar a cabo todo el proceso.

Para desarrollar este proceso de MM se comenzó con la realización de una experiencia a partir de la cual se buscó simular el fenómeno de Desintegración Radiactiva. Esta simulación consistió en utilizar una caja de cartón y 200 fichas de corcho con una de sus caras pintadas. El material, necesario para esta etapa del proceso de MM, fue elaborado por las practicantes y proporcionado a las alumnas del curso. Las fichas se colocaron dentro de la caja, distribuidas de tal modo que la cara pintada quedara hacia abajo. Luego debía taparse la caja y agitarla durante varios segundos. Posteriormente y luego de abrirla, debían retirarse todas aquellas fichas que se habían dado vuelta, es decir, las que tenían el lado de la cara pintada hacia arriba; contar la cantidad de fichas que quedaron dentro de la caja en ese intento; anotarlos en una tabla donde figuraba el número de intento y la cantidad de fichas. Sin volver a introducir las fichas sacadas,

debía repetirse el procedimiento hasta que quede una sola o ninguna e ir anotando siempre en la tabla cuántas quedaban en cada intento. El procedimiento completo se repitió 3 veces y así, cada grupo pudo completar 3 tablas distintas. Una vez realizada esta experiencia, sin entrar en el estudio del fenómeno, se procedió a hacer un análisis de los datos obtenidos. Para ello se accedió al laboratorio de computación y, haciendo uso del Software *Graphmatica*, se ingresaron los datos. Apelando a la herramienta “ajuste de curva”, se buscó la función matemática que mejor ajustaba dichos datos. Se les pidió que intentaran ajustar los datos con las curvas conocidas por ellas, por ejemplo con función lineal o función cuadrática. En todos los casos, las alumnas debían esgrimir algunas razones por las cuales esos ajustes eran o no adecuados. A partir de esta instancia, se les sugirió que probaran hacer el ajuste con otros modelos disponibles y ahí pudieron ver que la función exponencial, era la que mejor se adecuaba a los datos tabulados por cada grupo. Se concluyó que la curva exponencial representaba un buen modelo gráfico para la experiencia realizada. En una segunda instancia se abordó el estudio del fenómeno en cuestión recurriendo a material teórico sobre el proceso de Desintegración Radiactiva.

Una vez comprendida la naturaleza del fenómeno real, se procedió a establecer relaciones entre la teoría estudiada y la experiencia realizada. Para esto, primero, hubo que determinar qué representaba cada uno de los materiales utilizados en la experiencia con respecto a la teoría según se muestra en la Tabla N°1.

EXPERIMENTO	REALIDAD
Caja em corchos	Muestra de elementos radiactivos
Fichas de corcho	Núcleos de elementos radiactivos
- Fichas dadas vuelta	- Núcleos desintegrados
- Fichas no dadas vuelta	- Núcleos no desintegrados
Cada intento	Período de semidesintegración
Probabilidad de que se de vuelta un corcho: $\frac{1}{2}$	Probabilidad de que <i>No</i> se desintegre el núcleo de un elemento radiactivo: $\frac{1}{2}$

Tabla N° 1: relaciones establecidas

Una vez establecida la relación, se procedió a buscar una expresión que permitiera calcular el número de núcleos en el átomo, luego de transcurridos n periodos de

semidesintegración. Para llegar a ello se tuvo en cuenta la probabilidad obtenida y a través de la construcción de una tabla (ver Tabla N°2) se procedió a la búsqueda de regularidades en los cálculos.

Período de tiempo	Cantidad de núcleos en 1 átomo	Cálculos
0	200	
1	100	$(\frac{1}{2}).200$
2	50	$(\frac{1}{2}).100=(\frac{1}{2})^2.200$
...

Tabla N°2: Sistematización de la información y búsqueda de regularidades

Con ello se pudo arribar a la expresión $y=200 (\frac{1}{2})^x$ donde , y representa la cantidad de núcleos en la muestra, mientras que x representa los periodos de semidesintegración transcurridos; 200 es el tamaño inicial de la muestra y $\frac{1}{2}$ es la probabilidad de que no se desintegre un núcleo. Esta expresión representaba una solución formal para el modelo en estudio.

Solo restaba ahora testear el modelo obtenido, para ello se hizo uso de todos los datos obtenidos en la experiencia. Se recogieron los datos de todas las tablas y se armó una nueva tabla con el promedio de los mismos. Se recurrió nuevamente al software *Graphmatica*, y se ingresaron estos datos promedio para obtener un ajuste de curva exponencial obteniendo como aproximación la curva: $y= 194,03. (0,54)^x$

Así se pudo comprobar que el modelo empírico se aproximaba al modelo teórico probabilístico obtenido, dando por testado el modelo y concluido el proceso de modelización.

Luego de esto se procedió a seguir trabajando, estudiando la función exponencial, su expresión general, el sentido de sus parámetros y el análisis de la variación de los mismos recurriendo nuevamente al uso de *Graphmatica* y su representación gráfica. Para finalizar se trabajó con distintos ejercicios y problemas intra y extra matemáticos.

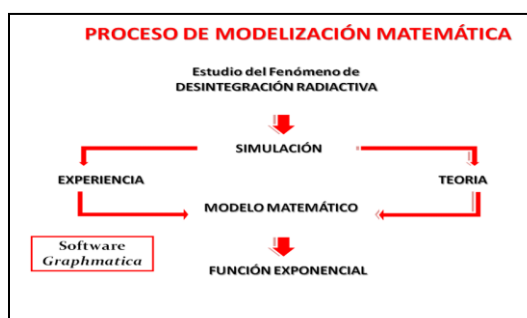
Conclusiones

La experiencia descrita, brinda amplia información al sentido que van adquiriendo las prácticas para los actores involucrados en ella. Tal vez recuperar las voces de

practicantes y de quienes fueron sus alumnas, ilustren en parte lo vivido. Por un lado, en el informe de sus prácticas, las practicantes manifestaron: *Podemos decir que trabajar con Simulación en el Proyecto de MM resultó una experiencia atractiva y novedosa como propuesta para el aula, en particular la simulación que realizamos, la cual fue más “tangible” y “material”, a diferencia de las que se llevan a cabo normalmente en computadoras, puesto que permite recrear un ambiente de aprendizaje en el cual el alumno lleva su propio ritmo y es protagonista activo, toma decisiones y recibe retroalimentación de sus acciones en dicho ambiente.*

Por otro lado, las alumnas de secundario que participaron de la experiencia, escribieron: *Me gustó trabajar con las cajas y los corchos para luego implementarlo en la computadora ya que esto facilitaba el entendimiento de algo abstracto o Lo que me resultó positivo fue la modelización y que de un trabajo práctico llegáramos a una fórmula matemática* (tomado de encuestas escritas realizadas a las alumnas). Respecto a lo escrito por estas alumnas podemos indicar que destacaron aspectos interesantes tales como : 1) el proceso de experimentación realizada con las cajas y corchos; 2) el uso del *Graphmatica* para ajustar los datos generados en la experimentación; 3) las relaciones establecidas entre aspectos teóricos y prácticos y 4) la posibilidad de construir un modelo. También hubo coincidencias entre las alumnas en marcar el tema del decaimiento radiactivo como cuestión que entraña dificultades y, en algunos casos podía obstaculizar el trabajo. Este hecho es reconocido como constitutivo del trabajo interdisciplinario.

Finalmente destacamos que la experiencia reportada significó un proceso en el que las alumnas de quinto año, las practicantes y las docentes vivenciaron un auténtico ambiente de aprendizaje significativo. En tal ambiente emergió, entre otros, una interesante relación entre MM, simulación y tecnologías tal como se describe en el siguiente cuadro presentado en clase y elaborado por las practicantes:



Relación entre simulación, MM y tecnologías (Vera & Villagra, 2012, p. 11)

Referencias bibliográficas

- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. San Pablo, Editora Contexto
- Biembengut, M y Hein, N. (2000) *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Editora Contexto.
- Blum, W; Galbraith, P; Henn, H y Niss, M (2003) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*. New York: Springer
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer Science+business Media (Mathematics Education Library).
- Cristante . A; Esteley, C; Marguet, I y Mina M. (2007). Experiencia de modelización en aula con orientación en Economía y Gestión de las Organizaciones En Abrate, R. y Pochulu, M. (Comp.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Cap. 16, p. 305-318. Editado por la UNVM: Villa María (Córdoba).
- Esteley, C.; Mina M.; Cristante. A y Marguet, I (2007). Innovaciones en el aula: desarrollo profesional y modelización. En Abrate, R. & Pochulu, M. (Comp.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Cap. 14, p.281.294. Editado por la UNVM: Villa María (Córdoba)
- Esteley C. (2011). *Desarrollo Profesional en Escenarios de Modelización Matemática: Voces y Sentidos*. Tesis Doctoral defendida en febrero de 2011. Programa de Doctorado en Educación Facultades de Filosofía y Letras de la UNC.
- Houston, K., Ikeda, T., Kaloudatos, N. y Matos, F. (2008). TSG 20: Mathematical, applications and modeling in the teaching and learning of mathematics (pp.377-381). En Niss, M. (Ed.) *Proceedings from the ICME 10*. IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University Denmark.
- Marguet I; Esteley C; Cristante A y Mina M (2007). Modelización como estrategia de enseñanza en un curso con orientación en Ciencias Naturales. En Abrate, R. & Pochulu, M. (Comp.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Cap 17 p. 319-332. Editado por la UNVM: Villa María (Córdoba)
- Vera, N. y Villagra, C. (2012). *Función Exponencial: proceso de modelización matemática*. Trabajo final de la práctica profesional correspondiente al Profesorado en Matemática de FaMAF-UNC. Córdoba, Argentina.
- Villarreal,M; Esteley, C y Mina, M (2010). Modeling empowered by information and communication technologies. *ZDM. Zentralblatt Fur Didaktik Der Mathematik. The Internacional Journal of Mathematics Education*. 42 (Issues 3-4), 405-419